Ejercicios de Manipuladores
EC-3514 - Robótica

Prof. Cecilia Murrugarra Q.
Departamento de Electrónica y Circuitos
Universidad Simón Bolívar

Herramientas:

1. Identidades Trigonométricas

$$cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$$
$$cos^2(\theta) - sen^2(\theta) = cos(2\theta)$$
$$cos^2(\theta) = \tfrac{1}{2}[1 + cos(2\theta)]$$
$$sen^2(\theta) = \tfrac{1}{2}[1 - cos(2\theta)]$$
$$sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) \pm cos(\alpha)sen(\beta)$$
$$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$$
$$c^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2cos(\alpha)$$

2. Cinemática

2.1. Parámetros Denavit-Hartenberg

$\theta_i = \widehat{X_{i-1}, X_i}/Z_{i-1}$
$d_i =$ distancia $(O_{i-1} \rightarrow X_i \cap Z_{i-1})/Z_{i-1}$
$\alpha_i = \widehat{Z_{i-1}, Z_1}/X_i$
$a_i =$ distancia $(X_i \cap Z_{i-1} \rightarrow O_i)/X_i$

$$A_{D-H} = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I.- Rotaciones, Translaciones.
Transformaciones Homogéneas

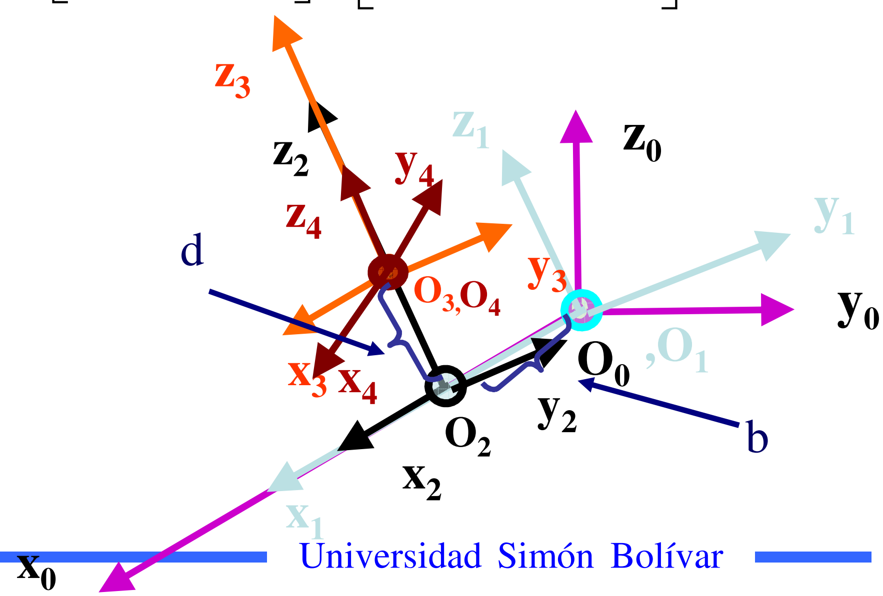
Transformaciones Homogéneas

EJEMPLO: Represente a partir de una matriz de Transformación Homogénea, la rotación de α grados sobre el eje x, seguido por una translación de b unidades, a lo largo del eje x , seguido por una translación de d unidades en el eje z actual, seguido por una rotación de θ grados sobre el eje z actual

$$A = Rot_{x,\alpha} Trans_{x,b} Trans_{z,d} Rot_{z,\theta}$$

$$A_0^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^4 = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & b \\ c_\alpha s_\theta & c_\alpha c_\theta & -s_\alpha & -s_\alpha d \\ s_\alpha s_\theta & s_\alpha c_\theta & c_\alpha & c_\alpha d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



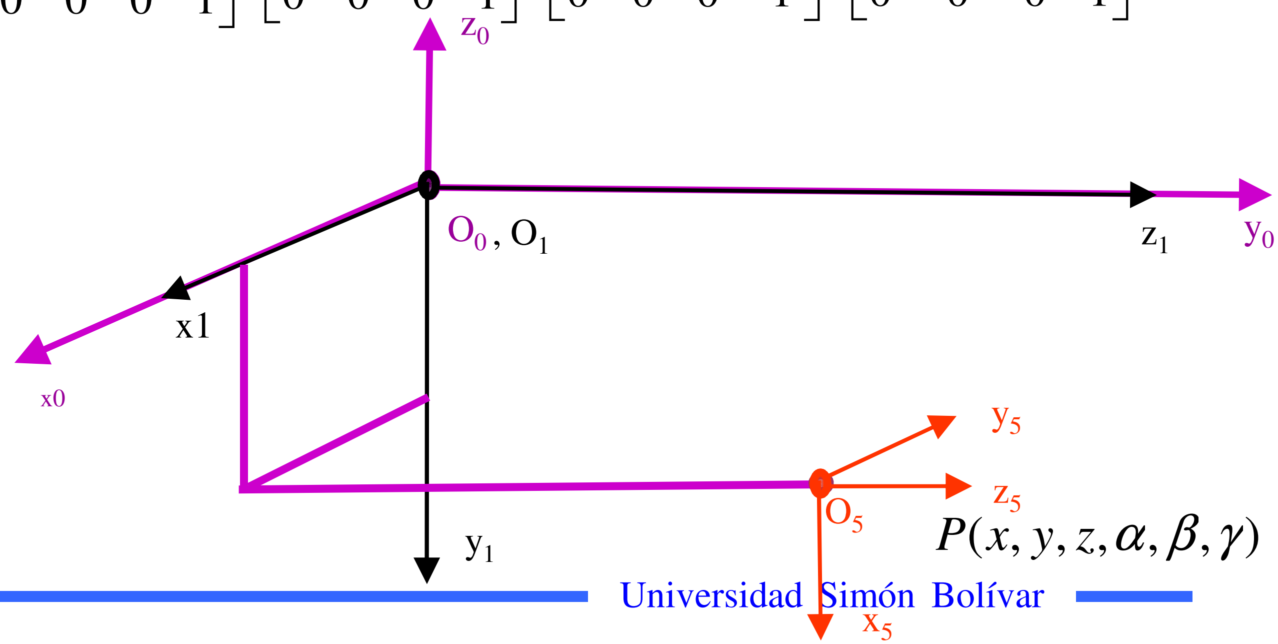
Transformaciones Homogéneas

<u>**Ejercicio1:**</u> Represente a partir de una matriz de Transformación Homogénea, la rotación de -90 grados sobre el eje x, seguido de una translación de P(5,5,10), seguido por una rotación de 90 grados sobre el eje z actual.

$$A_0^5 = Rot_{x,-90}\, Trans_{x,y,z,5,5,10}\, Rot_{z,90}$$

$$A_0^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$P(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$

Transformaciones Homogéneas

Ejercicio2: Represente a partir de una matriz de Transformación Homogénea, la translación de P(-3,10,10), rotación de -90 grados sobre el eje x, seguido de una rotación de 90 grados sobre el eje **y** actual.

$$A_0^5 = Trans_{x,y,z,-3,10,10} Rot_{x,-90} Rot_{y,90}$$

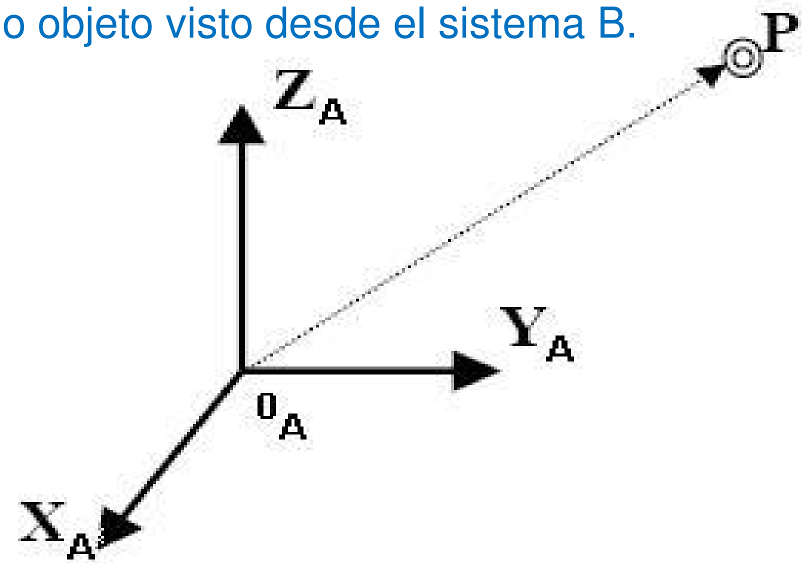
$$A_0^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafique cada una de las operaciones de rotación y translación y verifique el resultado a partir de la matriz de transformación resultante.

Transformaciones Homogéneas

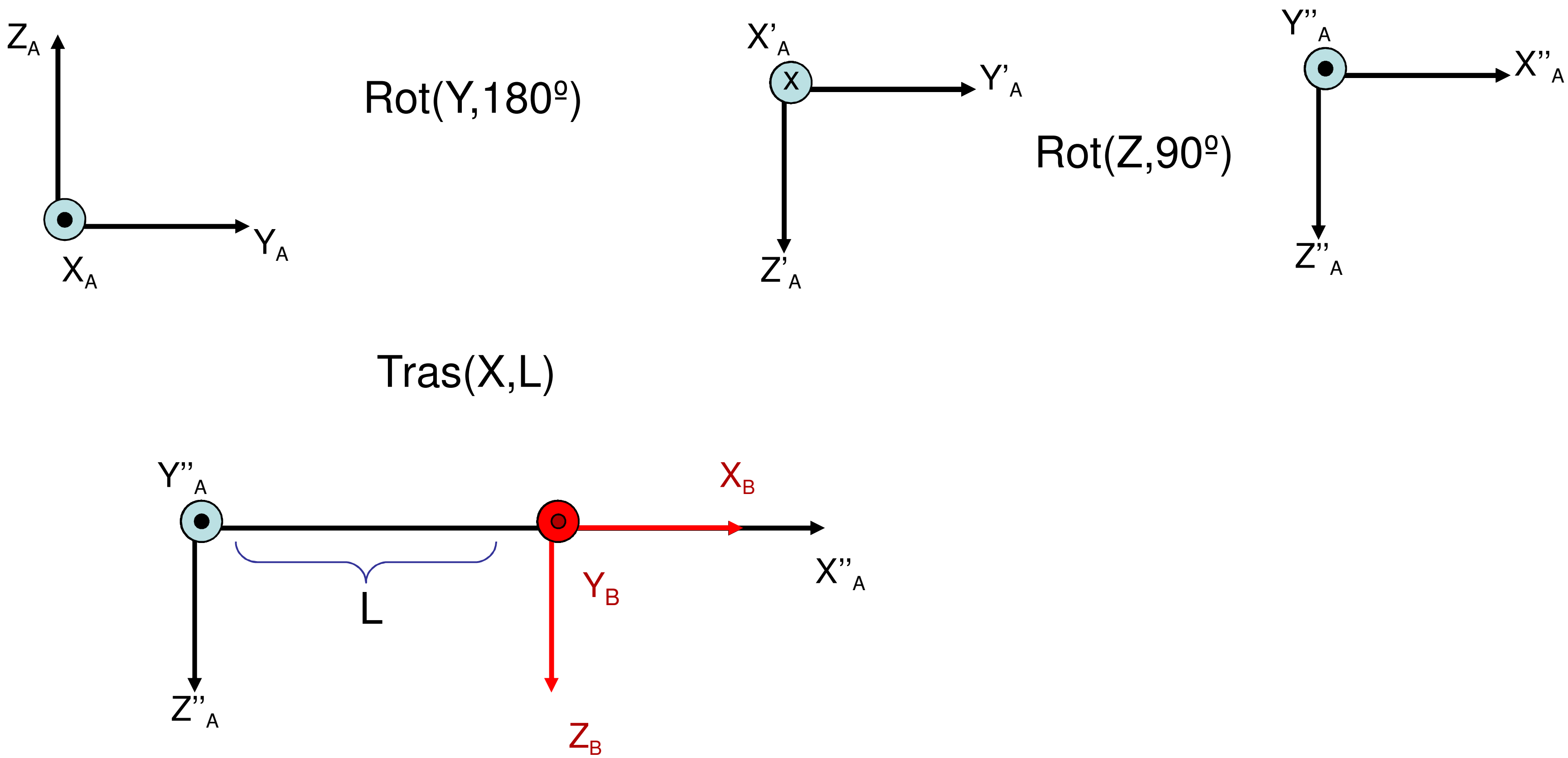
- **Ejercicio 3:** Un sistema coordenado A, descrito por sus componentes (X_A, Y_A, Z_A). A partir del sistema A, se obtiene un segundo sistema de coordenadas B cuyas componentes (X_B, Y_B, Z_B) se obtienen aplicando las siguientes transformaciones: Rot(z,90°); Tras(x,L) y una Rot(y,180°). Las dos primeras transformaciones fueron aplicadas sobre los sistemas móviles y la última sobre el sistema base.
  a) Dibuje el sistema B resultante.
  b) Calcule la matriz de transformación homogénea $A^B{}_A$.
  c) Un objeto visto desde el sistema A tiene coordenadas (P_X, P_Y, P_z). Calcule las coordenadas de dicho objeto visto desde el sistema B.



Transformaciones Homogéneas

Continuación ejercicio 3. Solución…

a) Dibuje el sistema B resultante.



Transformaciones Homogéneas

Continuación ejercicio 3. Solución…

b) Calcule la matriz de transformación homogénea A^B_A.

$$A^B_A = Rot(Y,180^\circ) * Rot(Z,90^\circ) * Tras(X,L)$$

$$Rot(Y,180^\circ) * Rot(Z,90^\circ) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^B_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones Homogéneas

Continuación ejercicio 3. Solución…

c) Un objeto visto desde el sistema A tiene coordenadas (P_X,P_Y,P_z) Calcule las coordenadas de dicho objeto visto desde el sistema B.

$$0_B^A = -\left[R_A^B\right]^T * 0_A^B$$

$$0_B^A = \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$